Corrigé du cahier de devoir de vacances

1 Calcul

1. Après calculs, on obtient :
   - $A = (-5x-8)(-3x+5) = 15x^2 - x - 40$
   - $B = \frac{1}{3}(3x-9)(4-x) = -x^2 + 7x - 12$
2. Après calculs, on obtient :
   - $(2x-7)^2 = 4x^2 - 28x + 49$
   - $(5x+3)^2 = 25x^2 + 30x + 9$
   - $(4x+11)(4x-11) = 16x^2 - 121$
3. Après calculs, on obtient :
   - $A = (4x+11)^2 = 16x^2 + 88x + 121$
   - $B = (5-3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$
   - $C = (4-2x)(4+2x) = 16 - 4x^2$
4. Après calculs, on obtient :
   - $A = 9 - 60x + 100x^2 = (3-10x)^2$
   - $B = 121 + 44x + 4x^2 = (11+2x)^2$
   - $C = 9x^2 - 49 = (3x-7)(3x+7)$
5. Après calculs, on obtient :
   - $A = (1+2x)(5x-4) + (1+2x)(6x+2) = (1+2x)(11x-2)$
   - $B = (x-4)(11x+5) - (4x+8)(11x+5) = -(11x+5)(3x+12)$
6. Après calculs, on obtient :
   - $-4x + 7 < 0$ pour $x \in \left]\frac{7}{4};+\infty\right[$
   - $11x + \frac{2}{3} \leq -\frac{4}{5}x + 3$ pour $x \in \left]-\infty;\frac{35}{177}\right[$
7. - $(7x-8)(-5x+2) = 0$ est une équation produit nul. Les solutions de cette équation sont $\frac{8}{7}$ et $\frac{2}{5}$.
   - $9x^2 - 11x = 0 \Longleftrightarrow x(9x-11) = 0$ est une équation produit nul. Les solutions de cette équation sont 0 et $\frac{11}{9}$.
   - $\frac{5x+9}{-5+2x} = 0$ est une équation quotient nul. On la résout sur $]-\infty;2,5[\cup]2,5;+\infty[$.
     La solution de cette équation est $-\frac{9}{5}$.
8. - $(7x-8)(-5x+2) \geq 0$. Grâce à un tableau de signe, on obtient : $S = \left[\frac{2}{5};\frac{8}{7}\right]$.
   - $\frac{5x-6}{-7x+3} \leq 0$. Grâce à un tableau de signe, on obtient, on obtient : $S = \left]-\infty;\frac{3}{7}\right[\cup \left]\frac{6}{5};+\infty\right[$.
9. a. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-5 &=& 0 \\ x-y-8 &=& 0 \end{array}\right.$. En utilisant la méthode par substitution ou par combinaison, on obtient que $x = \frac{29}{5}$ et $y = -\frac{11}{5}$.

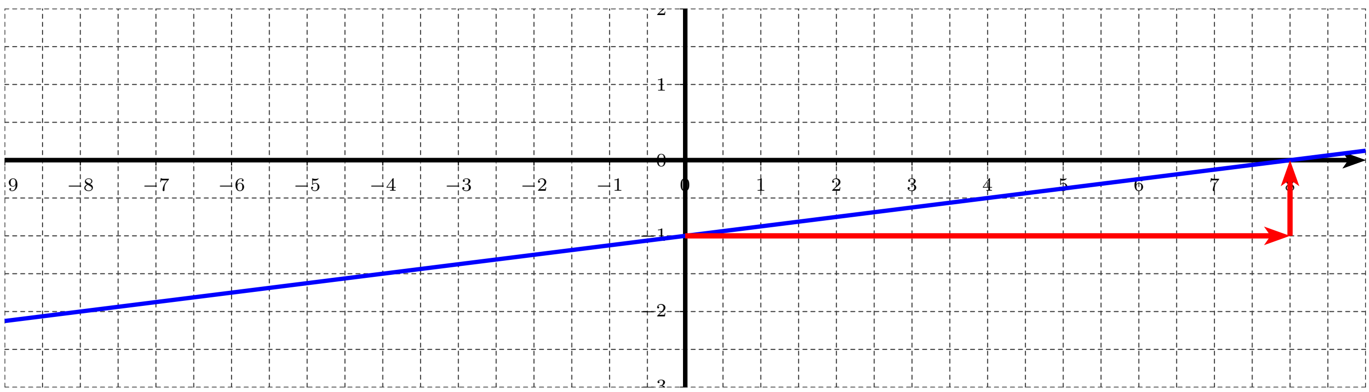
   b. $\left\{\begin{array}{rcl} 4x-y+8 &=& 0 \\ x+4y-10 &=& 0 \end{array}\right.$ En utilisant la méthode par substitution ou par combinaison, on obtient que $x = -\frac{22}{17}$ et $y = \frac{48}{17}$.

   c. $8 \times 1 - 4 \times 2 = 0$ donc les droites associés au système $\left\{\begin{array}{rcl} 8x+2y-3 &=& 0 \\ 4x+y-2 &=& 0 \end{array}\right.$ sont parallèles. Comme les deux équations ne sont pas proportionnelles, le système n'admet pas de solution.
10. En utilisant la propriété $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, on obtient :

- $A = \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$
- $B = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$
- $C = \sqrt{242} = \sqrt{121 \times 2} = 11\sqrt{2}$

2 Fonctions

1. Par lecture graphique, on a :



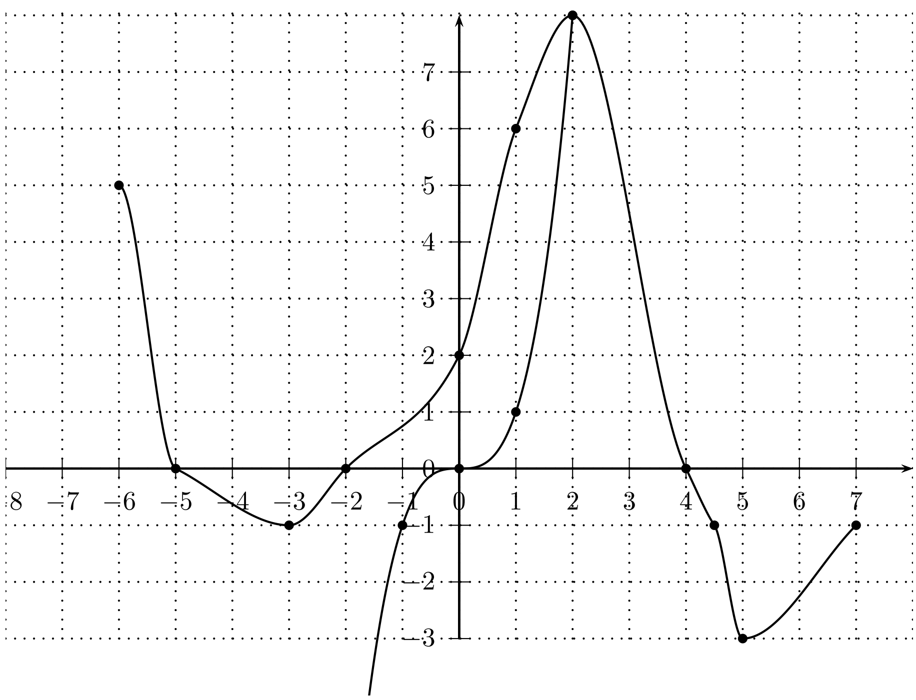
a. L'image de 4 par f est $\frac{1}{2}$.

b. L'antécédent de -2 par f est -8.

c. $f(x) > -\frac{3}{2}$ pour $x \in]-4; +\infty[$.

d. Le coefficient directeur de f est $m = \frac{1}{8}$ et l'ordonnée à l'origine est $p = -1$ donc l'expression de la fonction affine f est $f(x) = \frac{1}{8}x - 1$.

2. Courbe de g et de x^3 :



a. Le domaine de définition de g est $[-6; 7]$..

b. L'image de -3 par g est -1.

c. Les antécédents de 2 par g sont environ $-5,4$; 0 et $3,4$.

d. $g(x) > -1$ pour $x \in [-6; -3[\cup]-3; 4,5[$.

e. Tableau de signe de la fonction g :

x	-6		-5		-2		4		7
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

f. Tableau de variations de la fonction g :

x	-6		-3		2		5		7
$g(x)$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	8	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1

g. Voir ci-dessus.

h. $g(x) > x^3$ pour $x \in [-6; 2[$

3. a. L'image de 5 par h est -8 :

$$\begin{aligned} h(5) &= (-2 \times 5 + 6)(-5 + 7) \\ h(5) &= (-4) \times 2 \\ h(5) &= -8 \end{aligned}$$

b. Tableau de signe de la fonction h :

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$-2x+6$		$+$	0	$-$		$-$	
$-x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c. $h(x) < 0$ pour $x \in]3; 7[$

d. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} h(x) &= (-2x + 6)(-x + 7) \\ h(x) &= 2x^2 - 14x - 6x + 42 \\ h(x) &= 2x^2 - 20x + 42 \end{aligned}$$

e. Les antécédents de 42 par h sont 0 et 10 :

$$\begin{aligned} h(x) &= 42 \\ 2x^2 - 20x + 42 &= 42 \\ 2x^2 - 20x &= 0 \\ 2x\,(x - 10) &= 0 \\ 2x = 0 \quad &\text{ou} \quad x - 10 = 0 \\ x = 0 \quad &\text{ou} \quad x = 10 \end{aligned}$$

f. Tableau de variations de la fonction h :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$h(x)$		$\searrow$	-8	$\nearrow$	

g. A l'aide du tableau de variations de la fonction h sur $[1; 7]$, on en déduit que h admet sur $[1; 7]$ pour maximum 24 en $x = 1$ et pour minimum -8 en $x = 5$

x	1		5		7
$h(x)$	24	$\searrow$	-8	$\nearrow$	0

4. Fonctions vues en classe de seconde :

- Les fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$;
  Pour $p = 0$, on obtient le cas particulier des fonctions linéaires définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx$;
  Pour $m = 0$, on obtient le cas particulier des fonctions constantes définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = p$.
- La fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
- La fonction inverse définie sur $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
- La fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
- La fonction racine carrée définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

3 Géométrie

1. a. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A, il vient : $BC^2 = \sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{65}$.

   b. En utilisant les rapports trigonométriques, on obtient : $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{AB}{BC}$ et en entrant acos $\left(\dfrac{7}{\sqrt{65}}\right)$ à la calculatrice, on obtient $\widehat{ABC} \simeq 29,7°$.

2. a. D'après la formule des coordonnées du milieu $D(4,5;1,5)$

   b. D'après la formule de la distance dans un repère orthonormé : $AB = \sqrt{(1-8)^2+(-2-5)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

   c. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\-7\end{pmatrix}$

   d. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ donc det $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = -49 \neq 0$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

   e. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\-7\end{pmatrix}$ donc $(AB)\quad -7x+7y+c=0$. Or $A \in (AB)$, donc $-7x_A+7y_A+c=0$, ce qui donne $c=21$. Au final : $(AB)\ :\ -7x+7y+21=0$.

   f. Puisque $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$, en fonctionnant comme précédemment, on obtient $(BC)\ :\ 9x-2y-13=0$, ce qui donne $y = 4,5x-6,5$ comme équation réduite.

   g. Puisque Δ est dirigée par $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$, il vient $\Delta\ :\ 2x+5y+c=0$ et on trouve $c=8$ grâce aux coordonnées de B.

   h. Après calculs, on obtient $E(-11;-7)$

3. a. $x_A \neq x_B$ donc (AB) a une équation de la forme $y=mx+p$ avec $m = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{1}{2}$ d'où $(AB) : y = \dfrac{1}{2}x+p$.
   $A \in (AB)$ donc $2 = \dfrac{1}{2}\times(-4)+p$ soit $p=4$ donc $(AB) : y = \dfrac{1}{2}x+4$.

   b. $\dfrac{1}{2}x_C+4 = \dfrac{1}{2}\times 2+4 = 5 = y_C$ donc $C \in (AB)$ donc les points A, B et C sont alignés.

   c. Le point C appartient à la droite (AB).

   Pour déterminer si les droites (AB) et (DC) sont perpendiculaires, il faut étudier la nature du triangle ACD :

   Après calculs, on a : $AC=\sqrt{45}$; $CD = \dfrac{\sqrt{125}}{2}$ et $AD = \dfrac{\sqrt{305}}{2}$.

   Ainsi $AD^2 = \dfrac{305}{4}$ et $AC^2+CD^2 = 45+\dfrac{125}{4} = \dfrac{305}{4}$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ACD est rectangle en C. On en déduit que les droites (AB) et (DC) sont perpendiculaires.

   d. Après calculs, $AB=\sqrt{180}$ donc le triangle ADB a ainsi pour aire :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{AB\times CD}{2}\\ &= \frac{\sqrt{180}\times\frac{\sqrt{125}}{2}}{2}\\ &= \frac{75}{2}\end{aligned}$$

   e. Dans le triangle rectangle ACD et $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ on a :

$$\begin{aligned}\cos\widehat{CAD} &= \frac{AC}{AD}\\ \cos\widehat{CAD} &= \frac{\sqrt{45}}{\frac{\sqrt{305}}{2}}\\ \widehat{CAD} &= cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{45}}{\sqrt{305}}\right)\end{aligned}$$

   donc

$$\widehat{CAD} = \widehat{BAD} \simeq 39,8°$$

4. Un vecteur directeur de d est $\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ et un de Δ est $\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, les droites sont sécantes. En résolvant le système, on obtient $\left(\dfrac{31}{23};\dfrac{44}{23}\right)$ comme coordonnées du point d'intersection.

4 Algorithmique

1. a. $S(5) = 30$ et $S(10) = 55$.

   b. Algorithme :

```
S ⟵ 0
n ⟵ 10
Pour i allant de 1 à n
      S ⟵ S + i
Fin Pour
Afficher S.
```

   c. Algorithme :

```
S ⟵ 0
n ⟵ 0
Tant que S ⩽ 1000‘
      n ⟵ n + 1
      S ⟵ S + n
Fin Pour
Afficher n.
```

2. a. Algorithme :

```
Lire a
Lire b
Si a⩽b
      Afficher 'a ⩽ b'
Sinon
      Afficher 'b < a'
```

   b. Algorithme :

```
Lire a
Lire b
Lire c
Si a<b
      Si b<c
            Afficher 'a<b<c'
      Sinon
            Si a<c
                  Afficher a<c⩽b
            Sinon
                  Afficher c⩽a<b
Sinon
      Si a<c
            Afficher 'b⩽a<c'
      Sinon
            Si b<c
                  Afficher b<c⩽a
            Sinon
                  Afficher c⩽b⩽a
```

5 Statistiques

1. Nous avons relevé les temps de parcours de navigateurs de la Route du Rhum dans le tableau ci-dessous :

Jours	7	8	9	10	12	13	14	15	16	17	18	23
Nombre de navigateurs	2	4	2	1	3	2	7	1	1	1	3	3

   a. L'effectif total est $2+4+2+\ldots+3=30$.

   b. $\dfrac{30}{2}=15$ La médiane est donc la moyenne de la $15^{\text{ème}}$ et de la $16^{\text{ème}}$ valeur. Soit $m_1=\dfrac{14+14}{2}=14$. $\dfrac{30}{4}=7,5$ donc Q_1 est la $8^{\text{ème}}$ valeur soit $Q_1=9$. $\dfrac{30\times 3}{4}=22,5$ donc Q_3 est la $23^{\text{ème}}$ valeur soit $Q_3=16$.

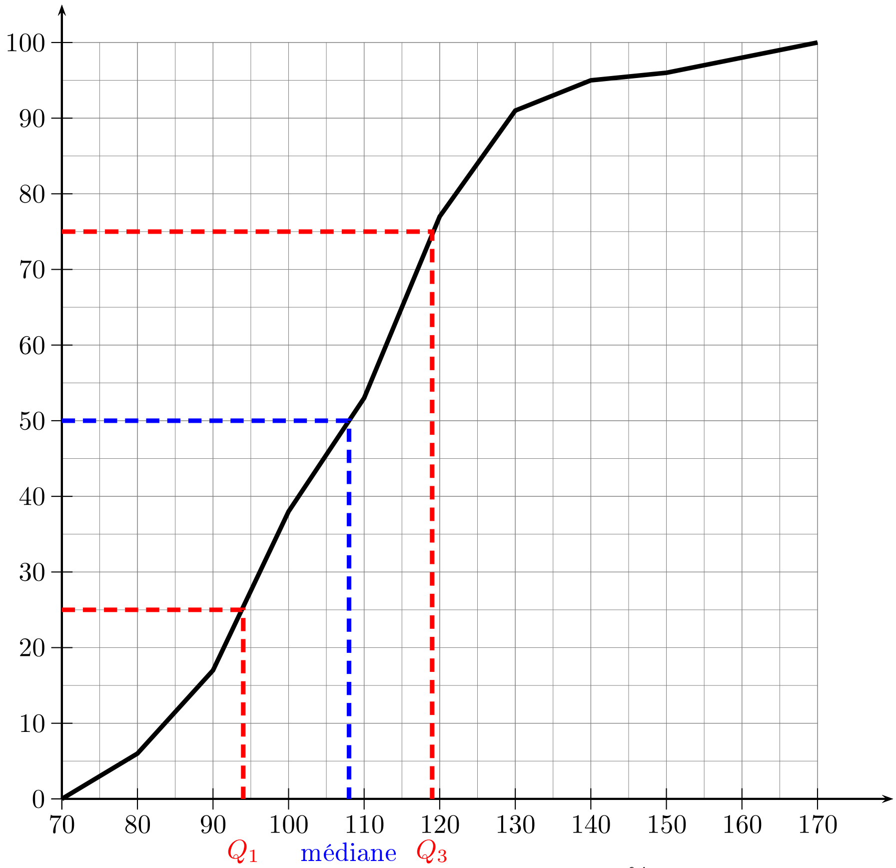
   c. La moyenne est $\overline{x}=\dfrac{7\times 2+8\times 4+\ldots+23\times 3}{30}=\dfrac{405}{30}=13,5$

2. a. On détermine le centre des classes :

Jours	[70 ;80[	[80 ;90[	[90 ;100[	[100 ;110[	[110 ;120[	[120 ;130[	[130 ;140[	[140 ;1
Navigateurs	4	8	15	11	17	10	3	1
Centre	75	85	95	105	115	125	135	145

   Une estimation de la moyenne est donc $\overline{x}=\dfrac{75\times 4+85\times 8+\ldots+160\times 3}{4+8+\ldots+3}=\dfrac{7795}{72}\approx 108,26$.

   b. courbe des fréquences cumulées croissantes :



   On peut lire sur le graphique que le nombre de navigateurs correspondant à 25% est de 94. Cela signifie que le premier quartile vaut 94. De même on voit que la médiane (au niveau du 50%) vaut approximativement 108 et le troisième quartile (au niveau du 75%) vaut approximativement 119.

6 Probabilités

1. Tableau :

	Défecteux	En bon état	Total
Usine de France	1600	32000	33600
Usine du Maroc	660	12000	12660
Usine d'Inde	1540	35000	36540
Total	3800	79000	82800

2. a. $P(F) = \dfrac{33600}{82800}$ et $P(D) = \dfrac{3800}{82800}$.

   b. $F \cap D$: le composant choisi vient de France et est défectueux et $P(F \cap D) = \dfrac{1600}{82800}$

   c. $F \cup D$: le composant choisi vient de France ou est défectueux et $P(F \cup D) = \dfrac{35800}{82800}$

   d. On calcule pour chaque usine le ratio $\dfrac{\text{en bon état}}{\text{total}}$ et la réponse sera l'usine possédant le plus haut.
   France : $\dfrac{32000}{33600} \simeq 0,952$
   Maroc : $\dfrac{12000}{12660} \simeq 0,947$
   Inde : $\dfrac{35000}{36540} \simeq 0,958$
   C'est donc l'usine de l'Inde où la qualité est la meilleure.